関数型データ構造

と

依存型

同時入門

前提知識

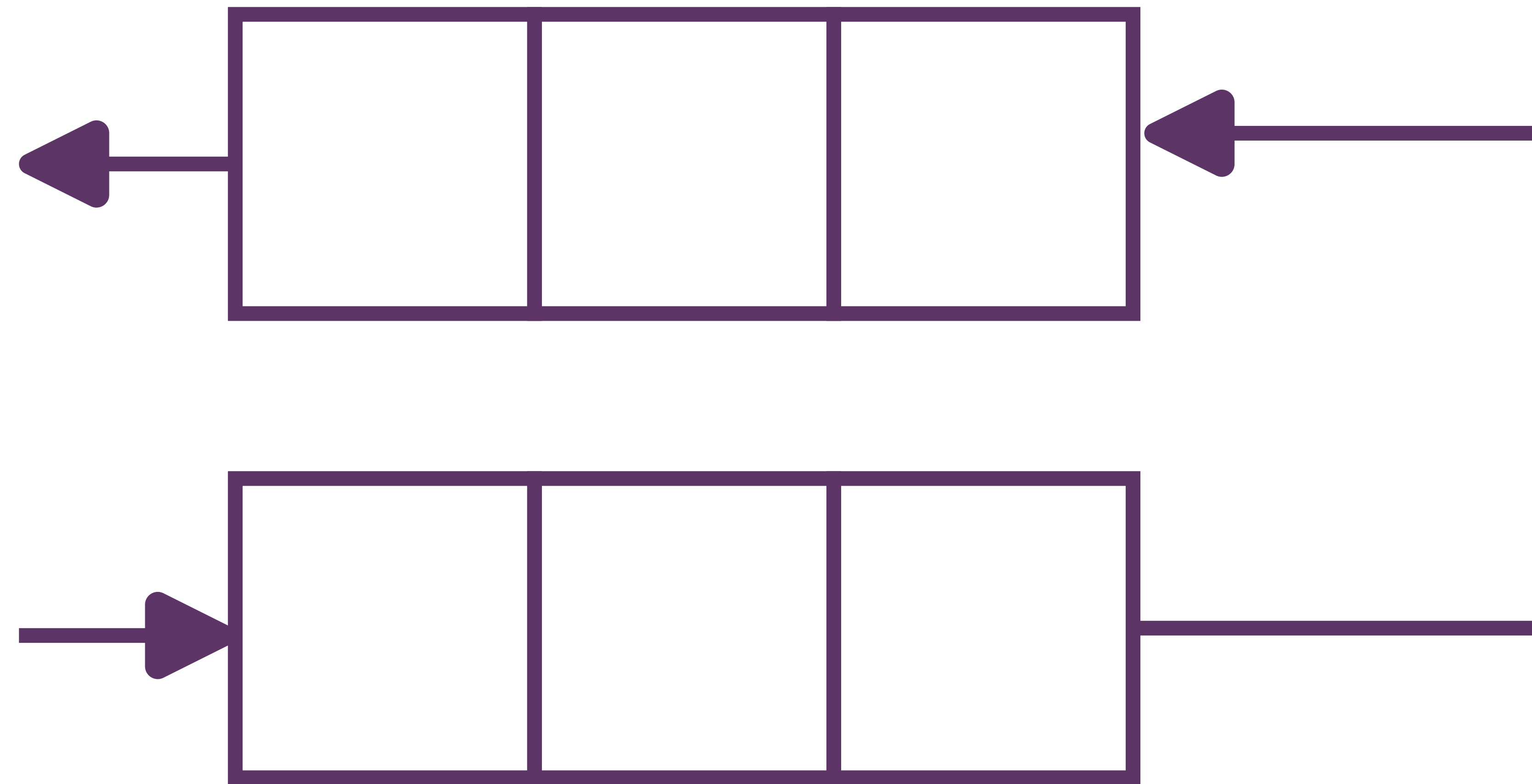
ペアノ数(Nat)

```
data Nat = Z | S Nat
```

- GADT

```
data List : (elem : Type) -> Type
where
  Nil : List elem
  (::) : (x : elem) ->
         (xs : List elem) ->
         List elem
```

Banker's Queue



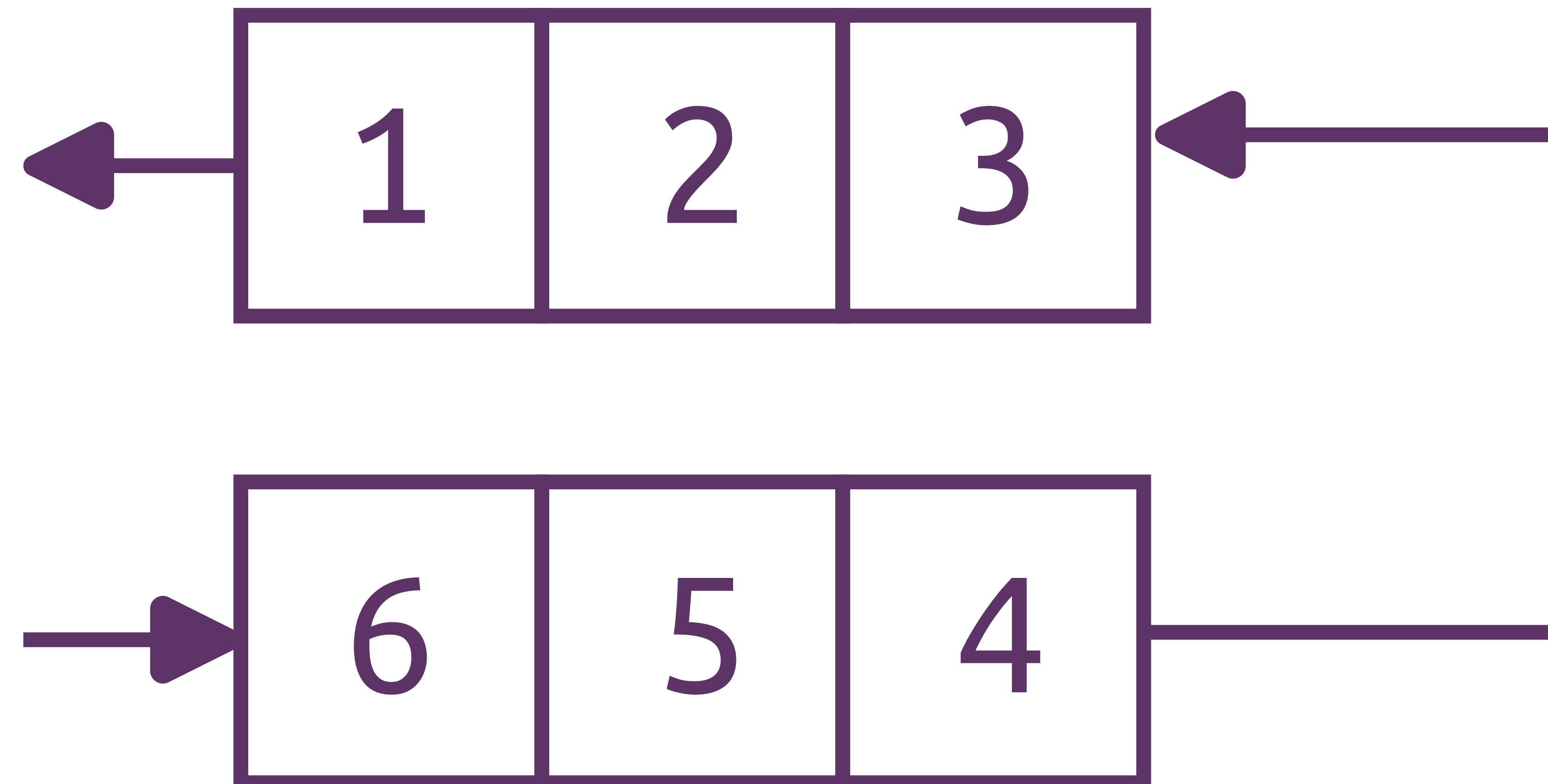
特徴1

関数型データ構造

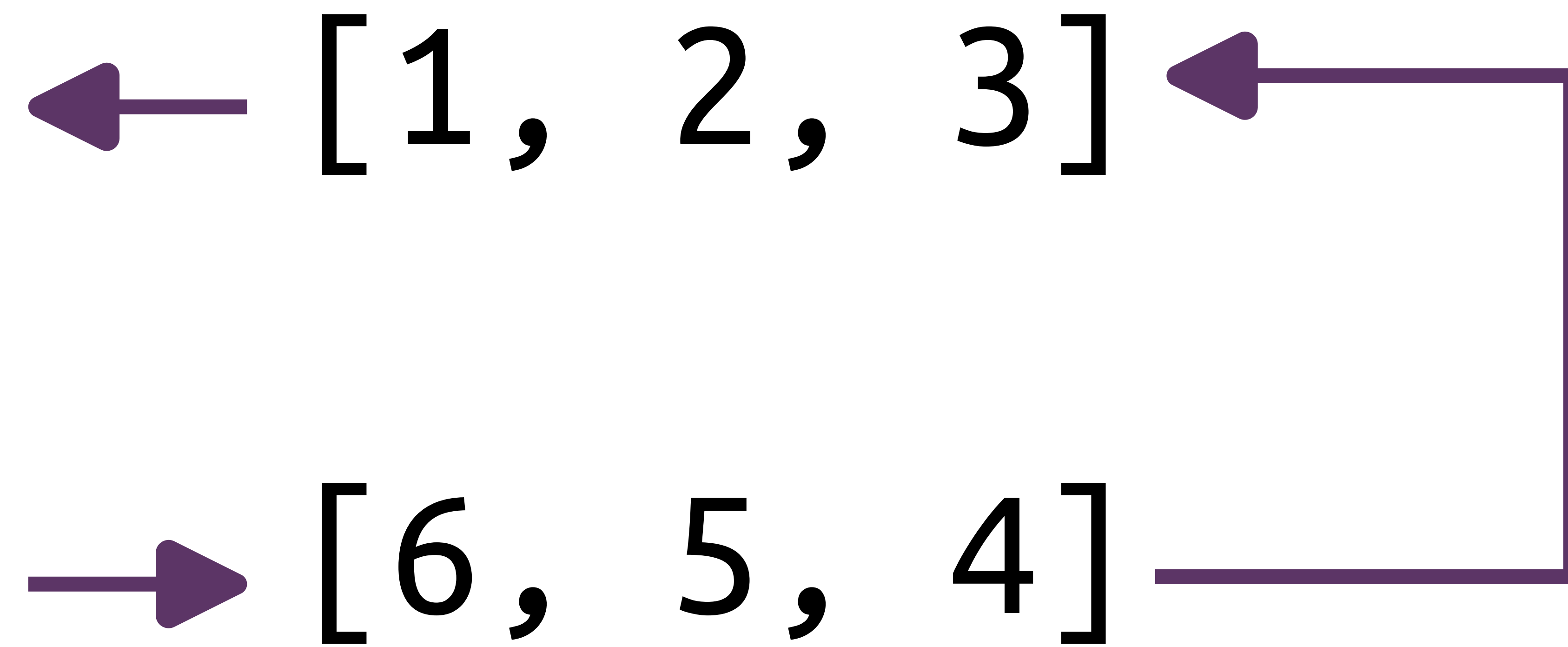
特徴2

各操作の償却計算量が$O(1)$

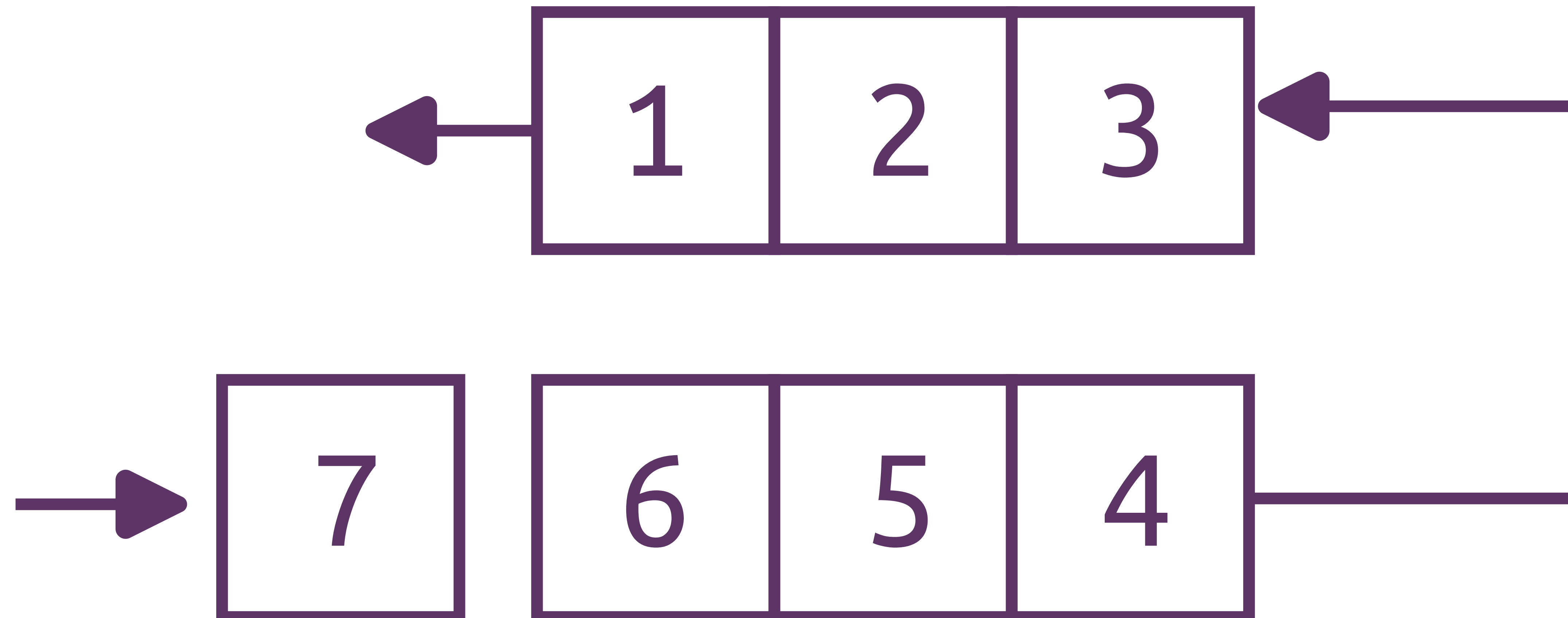
Banker's Queueのアイディア



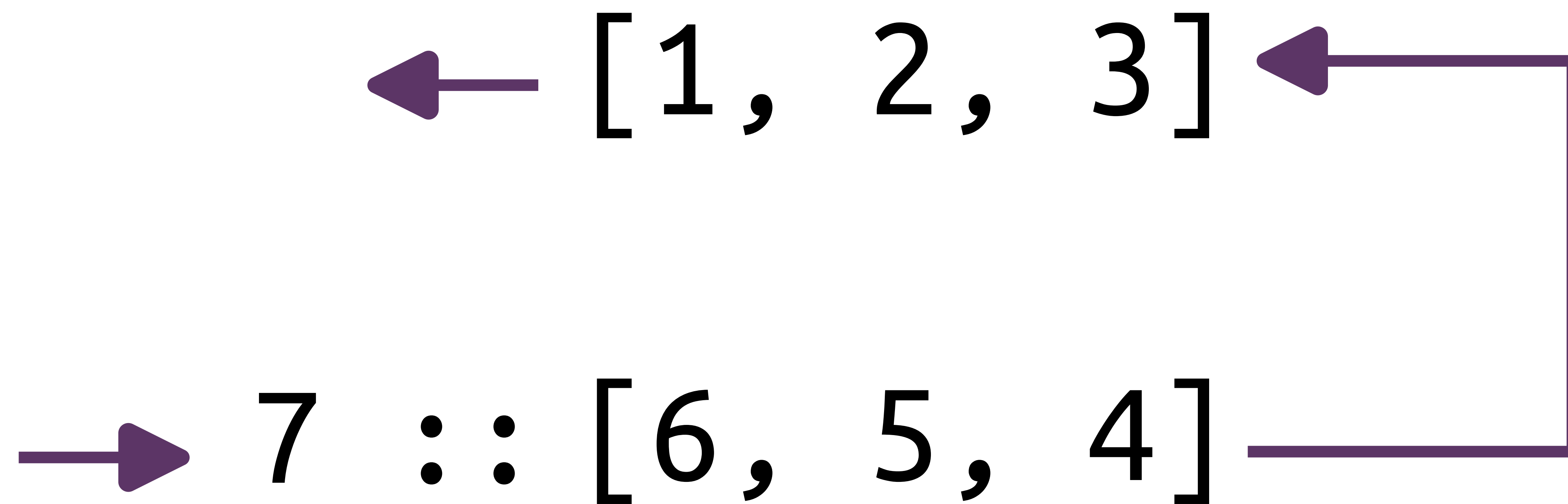
Banker's Queueのアイディア



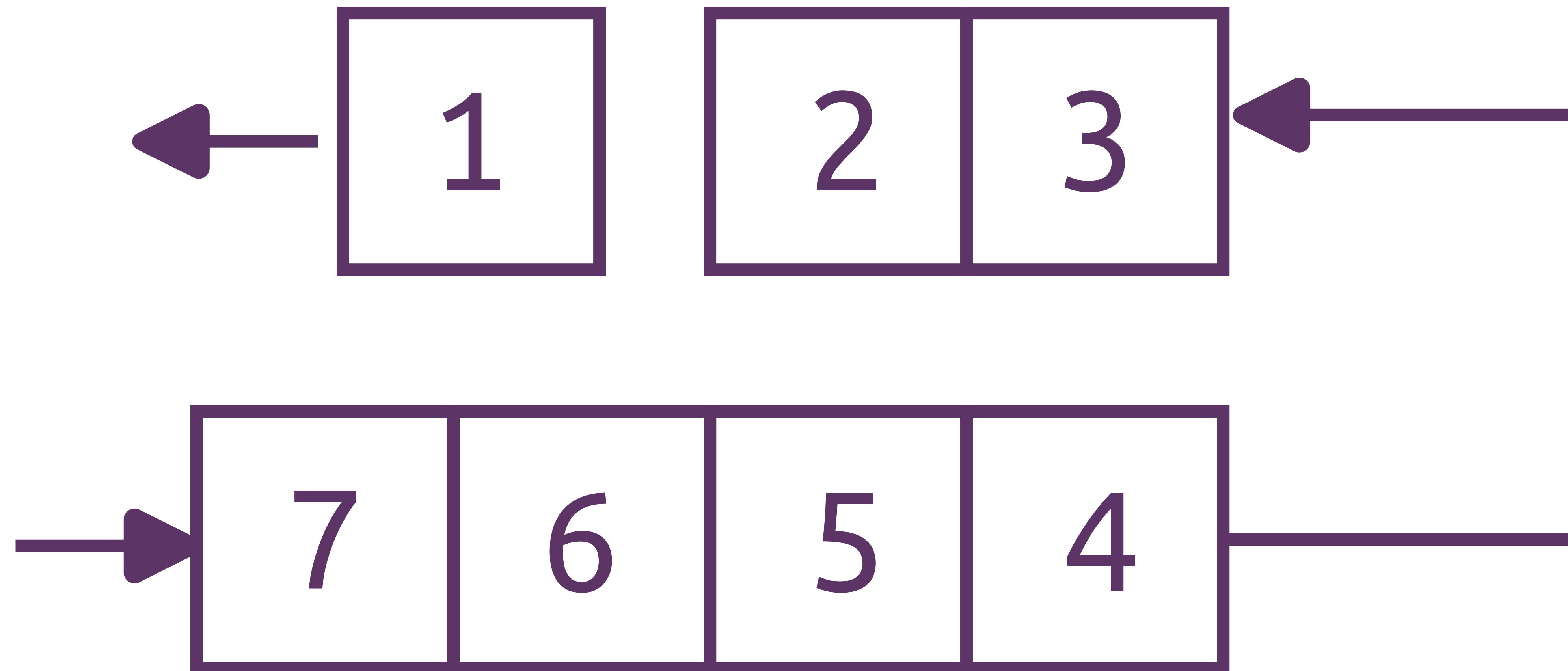
Banker's Queueのアイディア



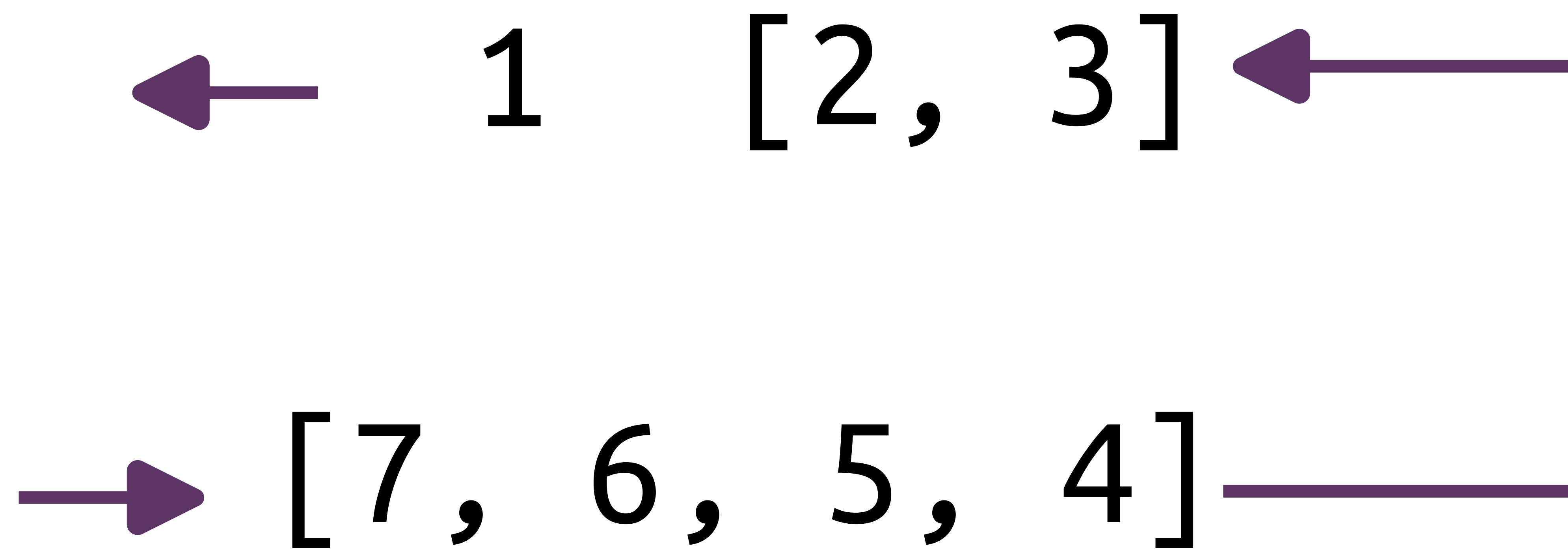
Banker's Queueのアイディア



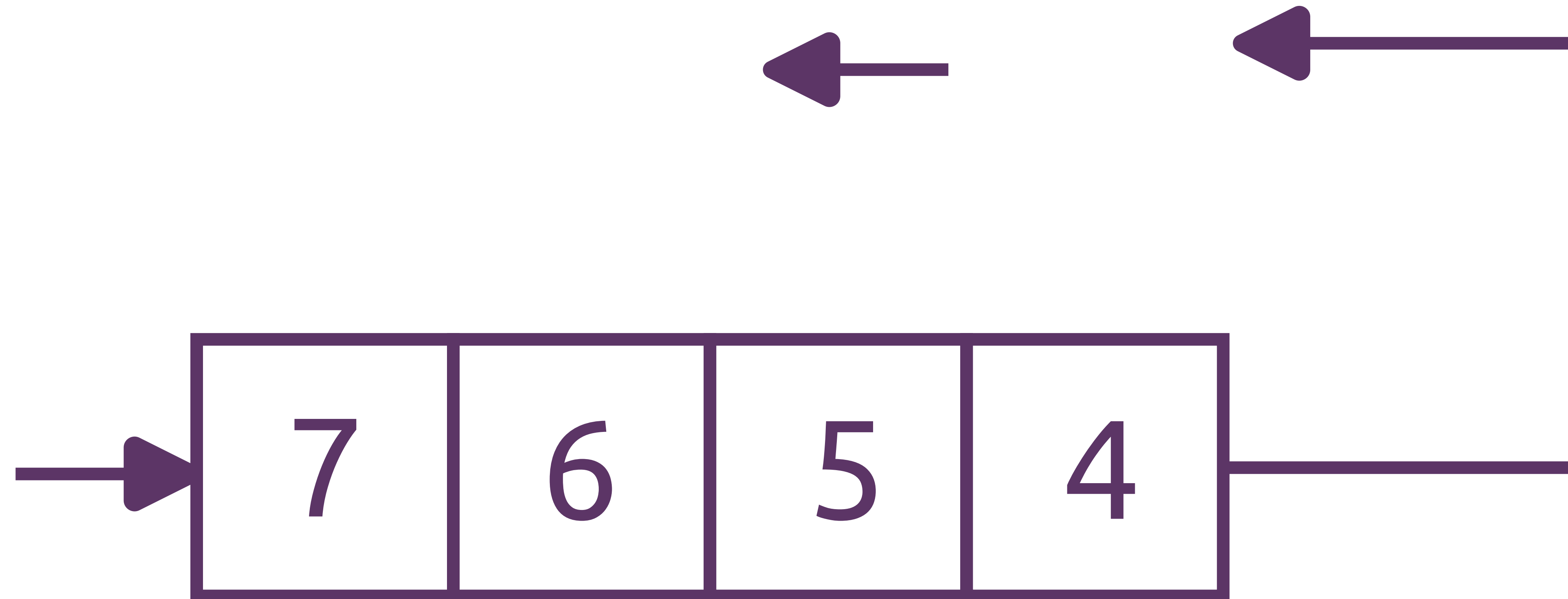
Banker's Queueのアイディア



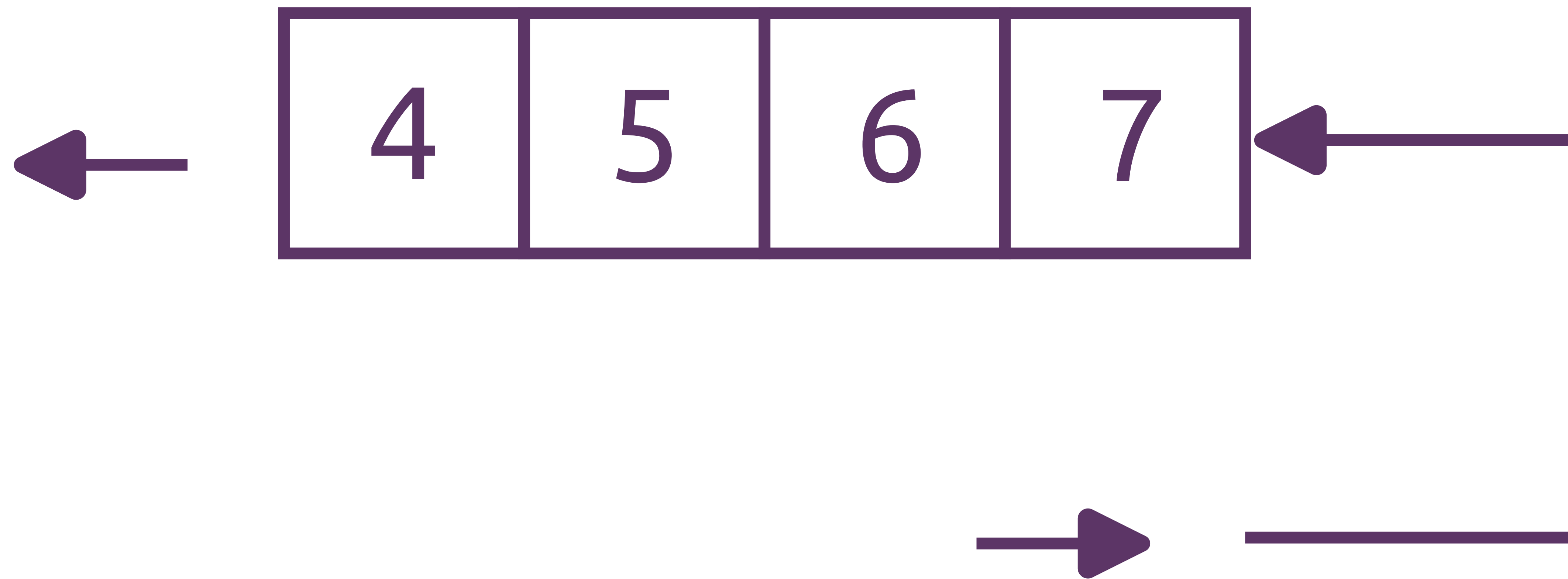
Banker's Queueのアイディア



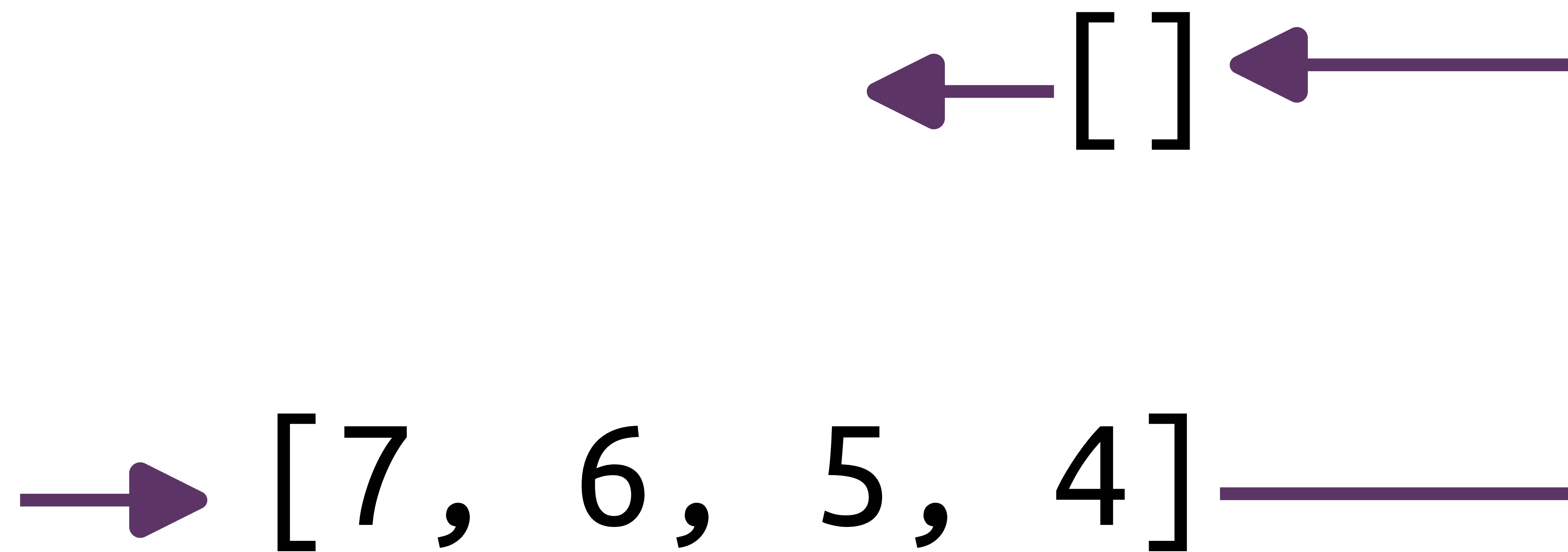
Banker's Queueのアイディア



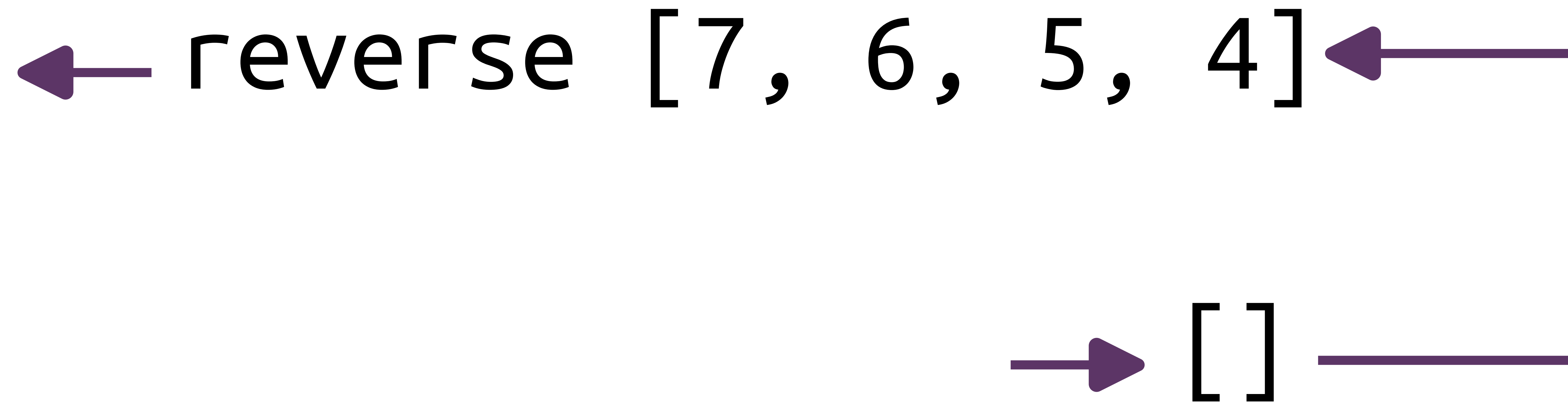
Banker's Queueのアイディア



Banker's Queueのアイディア



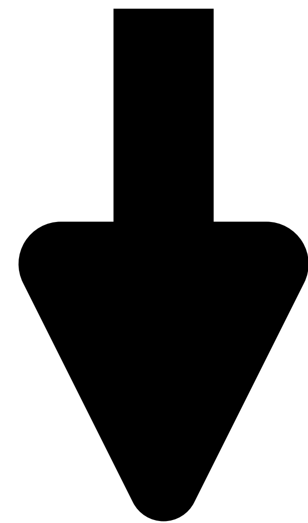
Banker's Queueのアイディア



計算量

enqueueは*O(1)*

dequeueは？



それまでの操作に依存するので
操作列で考えよう

基本は定数時間だが、たまにreverseが挟まる

```
— 1  [2, 3]
— [7, 6, 5, 4]

— reverse [7, 6, 5, 4]
— []
```

計算量

dequeueの**償却計算量**は*O(1)*

償却計算量

操作列を考えたときの平均のコスト

enqueueのときにreverseのコストを積立てていると考える

依存型の話

依存型とは

- ざっくりいうと型の位置に値を書ける

```
v1 : Vect 3 Integer
v1 = [1, 2, 3]
v2 : Vect 2 Integer
v2 = [4, 5]
v3 : Vect 5 Integer
v3 = v1 ++ v2
```

依存型

依存型とは、計算機科学と論理学において、値に依存する型のことである

依存型のある
プログラミング言語
Idrisでの例

依存型とデータ型

```
data Vect : (len : Nat) -> (elem : Type) -> Type where
  Nil   : Vect Z elem
  (::) : (x : elem) -> (xs : Vect len elem) -> Vect (S len) elem
```

```
v1 : Vect 3 Integer
v1 = [1, 2, 3]
```

依存型とデータ型

ユーザインタフェースとしての依存型

```
head : Vect (S len) elem -> elem
head (x::xs) = x
(++) : (xs : Vect m elem) ->
       (ys : Vect n elem) ->
       Vect (m + n) elem
(++) []      ys = ys
(++) (x::xs) ys = x :: xs ++ ys
```

依存型とデータ型

ユーザインタフェースとしての依存型

```
head : Vect (S len) elem -> elem
head (x::xs) = x
(++) : (xs : Vect m elem) ->
       (ys : Vect n elem) ->
       Vect (m + n) elem
(++) []       ys = ys
(++) (x::xs) ys = x :: xs ++ ys
```

長さ1以上を要求

結果がMaybeにならない

長さを計算できる

依存型とデータ型

実装補助としての依存型

```
data Tree : Nat -> Type -> Type -> Type where
  Leaf : k -> v -> Tree Z k v
  Branch2 : Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> Tree (S n) k v
  Branch3 : Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> Tree (S n) k v
```

2-3木の実装

依存型とデータ型

実装補助としての依存型

木の高さを型パラメータに持つ

```
data Tree : Nat -> Type -> Type -> Type where
  Leaf : k -> v -> Tree Z k v
  Branch2 : Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> Tree (S n) k v
  Branch3 : Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> Tree (S n) k v
```

2-3木の実装

依存型とデータ型

実装補助としての依存型

```
data Tree : Nat -> Type -> Type -> Type where
  Leaf : k -> v -> Tree Z k v
  Branch2 : Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> Tree (S n) k v
  Branch3 : Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> k ->
            Tree n k v -> Tree (S n) k v
```

同じ高さの木しか受け付けない

2-3木の実装

今日の話

依存型を使ってBanker's Queueを実装しよう

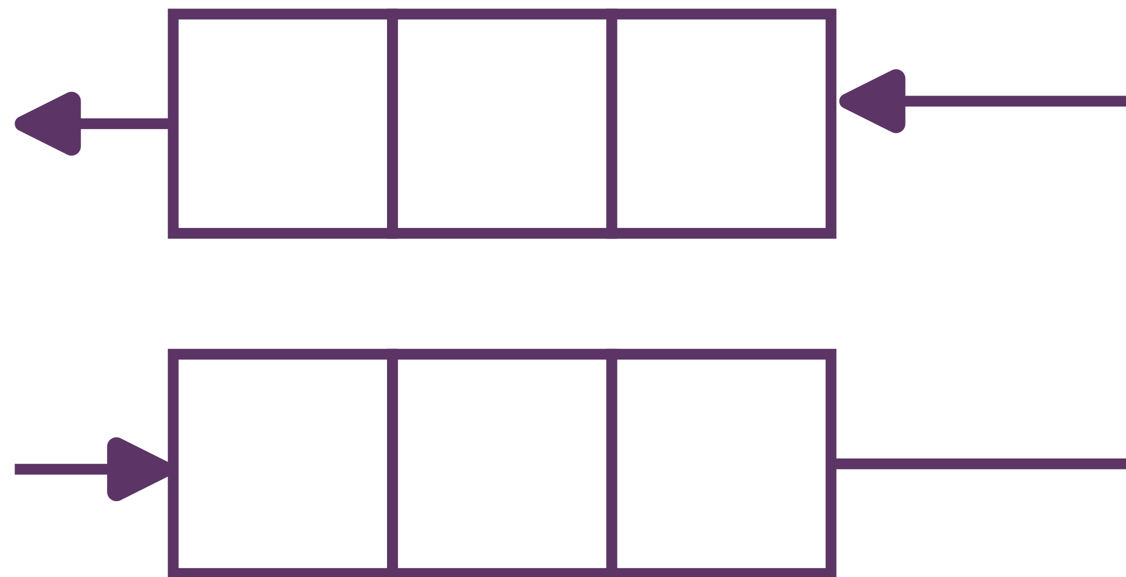
長さを型に持つ

https://gitlab.com/blackenedgold/idris-dependent-queue

実用上はn以下の長さを持つQueueの方が便利だけど話がややこしくなるので今回は長さ指定
上記URLにn以下の長さのキューの実装もある

定義

```
data Queue : Nat -> Type -> Type where
  MkQueue : (front : Vect l a) ->
            (rear : Vect m a) ->
            Queue (l + m) a
```



簡単な関数

```
empty : Queue 0 a
empty = MkQueue [] []

isEmpty : Queue n a -> Bool
isEmpty (MkQueue [] []) = True
isEmpty _ = False
```

`length`は必要ない。型から取り出せる

Enqueue?

```
enqueue : Queue n a -> a -> Queue (S n) a
enqueue (MkQueue front rear) x =
    MkQueue front (x :: rear)
```

Enqueue?

```
- + Errors (1)
 `-- Queue.idr line 42 col 3:
     When checking right hand side of enqueue with expected type
             Queue (S (l + m)) a

     Type mismatch between
             Queue (l + S m) a (Type of MkQueue front (x :: rear))
     and
             Queue (S (plus l m)) a (Expected type)

     Specifically:
             Type mismatch between
                     plus l (S m)
             and
                     S (plus l m)
```

Enqueue?

```
Type mismatch between
        plus l (S m)
and
       S (plus l m)
```

要約すると

$$l + (1 + m) \neq 1 + (l + m)$$

人間なら目で分かるが、Idrisは分からない

ルールを教えてコンパイラを説得したい

→証明

Enqueue?

標準ライブラリにまさになな関数がある

```
plusSuccRightSucc :
    (left : Nat) ->
    (right : Nat) ->
    S (left + right) = left + S right
```

Enqueue!

```
enqueue : Queue n a -> a -> Queue (S n) a
enqueue (MkQueue {l} {m} front rear) x =
    rewrite plusSuccRightSucc l m in
    MkQueue front (x :: rear)
```

Enqueue!

型からlとmを取り出す

```
enqueue : Queue n a -> a -> Queue (S n) a
enqueue (MkQueue {l} {m} front rear) x =
    rewrite plusSuccRightSucc l m in
    MkQueue front (x :: rear)
```

rewriteを使って
環境の型を書き換え

Dequeue?

```
dequeue : Queue (S n) a -> (a, Queue n a)
dequeue (MkQueue (x :: xs) rear) =
  (x, MkQueue xs rear)
dequeue (MkQueue [] rear) =
  case reverse rear of
    e::front => (e, MkQueue front [])
```

Dequeue?

長さ1以上

必ず値が返る

```
dequeue : Queue (S n) a -> (a, Queue n a)
dequeue (MkQueue (x :: xs) rear) =
  (x, MkQueue xs rear)
dequeue (MkQueue [] rear) =
  case reverse rear of
    e::front => (e, MkQueue front [])
```

Dequeue?

```
- + Errors (1)
 `-- Queue.idr line 50 col 16:
     When checking right hand side of Queue.case block in dequeue at Queue.idr:49:8-19 with expected type
             (a, Queue n a)

     When checking argument b to constructor Builtins.MkPair:
             Type mismatch between
                     Queue (n + 0) a (Type of MkQueue front [])
             and
                     Queue n a (Expected type)

             Specifically:
                     Type mismatch between
                             plus n 0
                     and
                             n
```

Dequeue!

```
dequeue : Queue (S n) a -> (a, Queue n a)
dequeue (MkQueue (x :: xs) rear) =
  (x, MkQueue xs rear)
dequeue {n} (MkQueue [] rear) =
  rewrite sym (plusZeroRightNeutral n) in
  case reverse rear of
    e::front => (e, MkQueue front [])
```

利用例

```
let q: Queue 0 Int = empty in
let q: Queue 1 Int = enqueue q 1 in
let q: Queue 2 Int = enqueue q 2 in
let (e, q) = dequeue q in
-- e == 2
let (e, q) = dequeue q in
-- e == 1
-- コンパイルエラー
-- let (e, q) = dequeue q in
```

まとめ

Banker's Queueは関数型データ構造

依存型は型で値を使える

Idrisで依存型が扱える

依存型はちょっと難しい

バックアップ

依存型とデータ型

```
SortedDMap : (k : Type) -> (v : k -> Type) -> Type
```

```
let t : SortedDMap Nat FlipFlop  = empty
let t = insert 0 True t
let t = insert 1 "String" t
let t = insert 2 False t
```

```
FlipFlop : Nat -> Type
FlipFlop n =
  case half n of
    HalfEven _ => Bool
    HalfOdd _ => String
```

依存積を使った木の例

依存型とデータ型

```
maybeToVect :
  Maybe elem ->
  (p ** Vect p elem)
```

依存和を使った関数の例
長さが0か1か分からないので
「ある長さpについてその長さのVect」で返す